OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICA-etapa locala
18 februarie 2012

Soluții și bareme

Clasa a VII-a

1.	Dacă n este de forma n=5k, $k \in N$, atunci $A = 2^{5k} + 1 = 32^k + 1 = (31 + 1)^k + 1 = M_{31} + 1 + 1 = M_{31} + 2$ Dacă $n = 5k + 1, k \in N, A = 2^{5k+1} + 1 = 2^{5k} \cdot 2 + 1 = 2(31 + 1)^k + 1 = M_{31} + 3$ Dacă $n = 5k + 2, k \in N, A = 2^2 \cdot 2^{5k} + 1 = 2^2(31 + 1)^k + 1 = M_{31} + 5$ Dacă $n = 5k + 3, k \in N, A = 2^3 \cdot 2^{5k} + 1 = 2^3(31 + 1)^k + 1 = M_{31} + 9$ Dacă $n = 5k + 4, k \in N, A = 2^4 \cdot 2^{5k} + 1 = 2^4(31 + 1)^k + 1 = M_{31} + 17$ Prin urmare în niciuna din situații A nu este M_{31}	2p 1p 1p 1p 1p 1p
2.	a) Din teorema bisectoarei $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}, deci\ \frac{AD}{c} = \frac{DC}{a} = \frac{AD+DC}{a+c} = \frac{b}{a+c}, deci\ AD = \frac{bc}{a+c}, DC = \frac{ab}{a+c}$ La fel deducem $AE = \frac{bc}{a+b}, BE = \frac{ac}{a+b}$ Cum $\Delta CMD \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow DM = \frac{bc}{a+c}$ Din $\Delta BNE \sim \Delta BAC\ deducem\ NE = \frac{bc}{a+b}$ b)Fie $PQ \perp BC$, din $\Delta BPQ \sim \Delta BDM \Rightarrow \frac{PQ}{DM} = \frac{BP}{BD}$ Din teorema bisectoarei în triunghiul $\Delta BDC, \frac{BP}{PD} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{BP}{PD} = \frac{a+c}{b} \Rightarrow \frac{BP}{BD} = \frac{a+c}{a+b+c}$ Prin urmare $PQ = DM \cdot \frac{BP}{BD} = \frac{bc}{a+c} \cdot \frac{a+c}{a+b+c} = \frac{bc}{a+b+c}$	1p 1p 1p 1p 2p 1p
3	a) $\sqrt{x+y} \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$, ridicând la pătrat ambii membrii obținem: $x + y \geq \frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{2} \mid \cdot 2$ $2x + 2y \geq x + y + 2\sqrt{xy} \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$ Adevărată conform inegalității mediilor. b) Din prima egalitate avem: $\sqrt{a + 16b} \geq \frac{\sqrt{a} + 4\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{b + 16a} \geq \frac{\sqrt{b} + 4\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$ Adunând relațiile membru cu membru obținem: $\sqrt{a + 16b} + \sqrt{b + 16a} \geq \frac{\sqrt{a} + 4\sqrt{b} + \sqrt{b} + 4\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$	1p 1p 1p 1p 1p 1p

Str. 1 Decembrie nr.5
420080, Bistrița, Jud B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

	Deci $\sqrt{a+16b}+\sqrt{b+16a}\geq\frac{5(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{2}}$ (1) Notăm $\sqrt{a}=t$, $\sqrt{b}=z$ şi din ipoteza ab=1, $\sqrt{ab}=1$, tz=1 si t+z mai mare sau egal cu 2, deci : $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 2$ Din relația (1) obținem: $\sqrt{a+16b}+\sqrt{b+16a}\geq\frac{5\cdot 2}{\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot 2}{2}=5\sqrt{2}$	1p

Str. 1 Decembrie nr.5
420080, Bistrița, Jud B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro